第6講　ベクトル

22　平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1：1 に内分する点を E，辺 BC を 2：1 に内分する点を F，辺 CD を 3：1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP：PQ を求めよ．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23 正四面体 OABC において，点 P，Q，R をそれぞれ辺 OA，OB，OC 上にとる．ただし P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする．△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行であることを証明せよ．

《12 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

24 四面体 ABCD において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ はそれぞれ垂直であるとする．このとき，頂点 A，頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ．《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

25 四面体OABCにおいて，点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線とその平面の交点をHとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$を求めよ．《11京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26　座標空間における次の３つの直線 l，m，n を考える：

l は点 A(1，0，−2) を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である．

m は点 B(1，2，−3) を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である．

n は点 C(1，−1，0) を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として，P から m，n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．このとき，PQ^2+PR^2 を最小にするような P と，そのときの PQ^2+PR^2 を求めよ．

《14 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　ベクトル

22 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1：1 に内分する点を E，辺 BC を 2：1 に内分する点を F，辺 CD を 3：1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP：PQ を求めよ．《13 京大・理系》

【答】 19：3

【解説】 ABCD は平行四辺形より $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ である．

辺 AB を 1：1 に内分する点が E より $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

辺 BC を 2：1 に内分する点が F より $\overrightarrow{AF}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,

辺 CD を 3：1 に内分する点が G より $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}}{4}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ と表せる．

ここで，P は線分 CE 上より $\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AE}=\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AD}\,(0\leqq t\leqq 1)$ と表せ,

また P は線分 FG 上より $\overrightarrow{AP}=(1-u)\overrightarrow{AF}+u\overrightarrow{AG}=\left(1-\dfrac{3}{4}u\right)\overrightarrow{AB}+\dfrac{u+2}{3}\overrightarrow{AD}\,(0\leqq u\leqq 1)$ と表せる．

よって $1-\dfrac{1}{2}t=1-\dfrac{3}{4}u$ かつ $1-t=\dfrac{u+2}{3}$ $\iff$ $t=\dfrac{3}{11}$，$u=\dfrac{2}{11}$ (これらは $0\leqq t\leqq 1$ と $0\leqq u\leqq 1$ を満たす) を得るので $\overrightarrow{AP}=\dfrac{19}{22}\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{11}\overrightarrow{AD}$ となる．

ここで，Q は直線 AP 上より，実数 k を用いて $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=\dfrac{19}{22}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{11}k\overrightarrow{AD}$ と表せ，また Q は辺 BC 上より $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AD}\,(0\leqq l\leqq 1)$ と表せるので，$\dfrac{19}{22}k=1$ かつ $\dfrac{8}{11}k=l$ $\iff$ $k=\dfrac{22}{19}$，$l=\dfrac{16}{19}$ (これは $0\leqq l\leqq 1$ を満たす) となる．

よって AP：PQ$=1:(k-1)=$**19 : 3**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23 正四面体OABCにおいて，点P，Q，Rをそれぞれ辺OA，OB，OC上にとる．ただしP，Q，Rは四面体OABCの頂点とは異なるとする．△PQRが正三角形ならば，3辺PQ，QR，RPはそれぞれ3辺AB，BC，CAに平行であることを証明せよ．

《12京大・理系》

【答】 略

【解説】 正四面体の一辺の長さを $l(>0)$ とすると，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=l$ であり，

$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{l^2}{2}$，同様に $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\dfrac{l^2}{2}$ である．

0より大きく1より小さい3つの実数 α，β，γ を用いて $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\beta\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=\gamma\overrightarrow{OC}$ と表せる．

このとき，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\beta\overrightarrow{OB}-\alpha\overrightarrow{OA}$ より

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\beta\overrightarrow{OB}-\alpha\overrightarrow{OA}|^2=\beta^2|\overrightarrow{OB}|^2-2\alpha\beta\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\alpha^2|\overrightarrow{OA}|^2=l^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

同様に $|\overrightarrow{QR}|^2=l^2(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2)$，$|\overrightarrow{RP}|^2=l^2(\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2)$ を得る．

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{QR}|$ より

$$\begin{aligned}l^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=l^2(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2)\quad&\Longleftrightarrow\quad \alpha^2-\alpha\beta=-\beta\gamma+\gamma^2\\&\Longleftrightarrow\quad(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)=0\\&\Longleftrightarrow\quad \alpha=\gamma\text{または}\beta=\alpha+\gamma\quad\cdots①\end{aligned}$$

となる．

$|\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{RP}|$ より同様に $\beta=\alpha$ または $\gamma=\beta+\alpha$ …②を得る．

ここで $\alpha=\gamma$ かつ $\gamma=\beta+\alpha$ とすると $\beta=0$ となり，$\beta=\alpha+\gamma$ かつ $\beta=\alpha$ とすると $\gamma=0$ となり，$\beta=\alpha+\gamma$ かつ $\gamma=\beta+\alpha$ とすると $\alpha=0$ となるので，いずれも α，β，γ は正であることに不適．

よって①，②より $\alpha=\gamma$ かつ $\beta=\alpha$ つまり $\alpha=\beta=\gamma$ となる．

ゆえに $\overrightarrow{PQ}=\alpha\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{QR}=\alpha\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{RP}=\alpha\overrightarrow{CA}$ となり，3辺PQ，QR，RPはそれぞれ3辺AB，BC，CAに平行であることが示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

24　四面体 ABCD において $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ はそれぞれ垂直であるとする．このとき，頂点 A，頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ．《10 京大・理系》

【答】 略

【解説】 M は CD の中点より $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$ である．

$\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ が垂直より $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

同様に，$\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$ が垂直より $|\overrightarrow{AD}|^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ が垂直より $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ を得る．

以上より $|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD}|^2$ となる．

このとき

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)=0$$

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$$

であり $|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{CD}|\neq 0$ より AM と CD，BM と CD が垂直であること，つまり A，B，M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

25	四面体OABCにおいて，点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線とその平面の交点をHとする．$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$，$\lvert\overrightarrow{OA}\rvert=2$，$\lvert\overrightarrow{OB}\rvert=\lvert\overrightarrow{OC}\rvert=3$，$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{7}$のとき，$\lvert\overrightarrow{OH}\rvert$を求めよ．《11京大・文系》

【答】 $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

【解説】 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$ より $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$．これと，$\lvert\overrightarrow{OA}\rvert=2$，$\lvert\overrightarrow{OB}\rvert=3$，$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2=\lvert\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\rvert^2=\lvert\overrightarrow{OA}\rvert^2+\lvert\overrightarrow{OB}\rvert^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=7$ より
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=3$ となる．

Hは3点A，B，Cを含む平面上の点より $\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$ と表せる．ただし，α，β，γ は実数で $\alpha+\beta+\gamma=1$　…①を満たす．

ここで，OHが3点A，B，Cを含む平面と垂直なので，

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ であるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\lvert\overrightarrow{OA}\rvert^2)\alpha+(\lvert\overrightarrow{OB}\rvert^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\beta+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\gamma\\&=-\alpha+6\beta-3\gamma=0\quad\cdots②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\lvert\overrightarrow{OA}\rvert^2)\alpha+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\beta+(\lvert\overrightarrow{OC}\rvert^2-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\gamma\\&=-\alpha-3\beta+6\gamma=0\quad\cdots③\end{aligned}$$

①，②，③より $\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\beta=\dfrac{1}{5}$，$\gamma=\dfrac{1}{5}$．

よって

$$\begin{aligned}\lvert\overrightarrow{OH}\rvert^2&=\lvert\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}\rvert^2\\&=\alpha^2\lvert\overrightarrow{OA}\rvert^2+\beta^2\lvert\overrightarrow{OB}\rvert^2+\gamma^2\lvert\overrightarrow{OC}\rvert^2+2\alpha\beta\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\beta\gamma\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\gamma\alpha\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=\frac{18}{5}\end{aligned}$$

より $\lvert\overrightarrow{OH}\rvert=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{10}}{5}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26 座標空間における次の３つの直線 l，m，n を考える：

l は点 A(1，0，−2) を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である．

m は点 B(1，2，−3) を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である．

n は点 C(1，−1，0) を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として，P から m，n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．このとき，PQ^2+PR^2 を最小にするような P と，そのときの PQ^2+PR^2 を求めよ．

《14 京大・理系》

【答】 P(1，0，−2)，PQ^2+PR^2 の最小値は 7

【解説】 実数 p，q，r を用いて

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+p\vec{u}$，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+q\vec{v}$，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OC}+r\vec{w}$ と表せる．

ここで $PQ\perp m$ より $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=(\overrightarrow{AB}+q\vec{v}-p\vec{u})\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}+q|\vec{v}|^2-p\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ …①

また $PR\perp n$ より同様に $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{w}+r|\vec{w}|^2-p\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ …②を得る．

このとき

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{PQ}|^2&=\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{AB}+q\vec{v}-p\vec{u})\\
&=q\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}+\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{AB}-p\vec{u})\\
&=(\overrightarrow{AB}+q\vec{v}-p\vec{u})\cdot(\overrightarrow{AB}-p\vec{u})\\
&=(\overrightarrow{AB}-p\vec{u})\cdot(\overrightarrow{AB}-p\vec{u})+q(\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}-p\vec{u}\cdot\vec{v})
\end{aligned}
$$

ここで①より $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}-p\vec{u}\cdot\vec{v}=-q|\vec{v}|^2$ なので $|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{AB}-p\vec{u}|^2-q^2|\vec{v}|^2$ …③となる．

同様に $|\overrightarrow{PR}|^2=|\overrightarrow{AC}-p\vec{u}|^2-r^2|\vec{w}|^2$ …④である．

ここで $\overrightarrow{AB}=(0,\ 2,\ -1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ -1,\ 2)$，$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，$\vec{u}\cdot\vec{w}=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=-3$，$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{w}=0$ なので，

$$
\text{①}\iff -3+3q=0\qquad\therefore\ q=1
$$

$$
\text{②}\iff 6r-3p=0\qquad\therefore\ r=\frac{1}{2}p
$$

更に $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=3$，$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=-3$ と③と④より

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{PQ}|^2&=|\overrightarrow{AB}|^2-2p\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}+p^2|\vec{u}|^2-q^2|\vec{v}|^2\\
&=6p^2-6p+2\\
|\overrightarrow{PR}|^2&=|\overrightarrow{AC}|^2-2p\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}+p^2|\vec{u}|^2-r^2|\vec{w}|^2\\
&=\frac{9}{2}p^2+6p+5
\end{aligned}
$$

となるので，$PQ^2+PR^2=\dfrac{21}{2}p^2+7$ となり，

$p=0$ つまり **P(1，0，−2)** のとき **PQ^2+PR^2** の最小値は **7**.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。